Глава X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекции 37–43

§ 47. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

47.1. Основные понятия

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются ***дифференциальными*** (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.). ***Решением*** дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Так, решением уравнения $y' = f(x)$ является функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Рассмотрим некоторые общие сведения о дифференциальных уравнениях (ДУ).

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то ДУ называют *обыкновенным*; в противном случае — *ДУ в частных производных*. Далее будем рассматривать только обыкновенные ДУ.

Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется ***порядком*** этого уравнения.

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ — обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $x^2y' + 5xy = y^2$ — первого порядка; $y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$ — ДУ в частных производных первого порядка.

Процесс отыскания решения ДУ называется его *интегрированием*, а график решения ДУ — *интегральной кривой*.

§ 48. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

48.1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x; y; y') = 0. \tag{48.1}$$

Уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'. Если уравнение (48.1) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде

$$y' = f(x; y) \tag{48.2}$$

и называют *ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной*. Мы в основном будем рассматривать эту форму записи ДУ.

Уравнение (48.2) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $(x; y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y' = f(x; y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости Oxy. Таково геометрическое истолкование ДУ первого порядка.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется *изоклиной*. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = c$, т. е. $f(x; y) = c$.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме*:

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0, \tag{48.3}$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — известные функции. Уравнение (48.3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой. Отметим, что от одного вида записи ДУ можно перейти к другому.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений (отличающихся друг от друга постоянными величинами). Легко догадаться, что решением уравнения $y' = 2x$ является функция $y = x^2$, а также $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - \sqrt{2}$ и вообще $y = x^2 + c$, где c — const.

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, т. е. $y = y_0$ называется *начальным условием*. Начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\Big|_{x=x_0} = y_0. \tag{48.4}$$

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x;c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $\varphi(x;c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c.

2. Каково бы ни было начальное условие (48.4), можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x;c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x;c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x;c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x;y;c) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* ДУ. Уравнение $\Phi(x;y;c_0) = 0$ в этом случае называется *частным интегралом* уравнения.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x;c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy; частное решение $y = \varphi(x;c_0)$ — одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0;y_0)$.

Задача отыскания решения ДУ первого порядка (48.3), удовлетворяющего заданному начальному условию (48.4), называется ***задачей Коши***.

48.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является уравнение ви

$$P(x)\cdot dx + Q(y)\cdot dy = 0. \quad (48$$

В нем одно слагаемое зависит только от x, а другое — от y. Ино такие ДУ называют уравнениями *с разделенными переменными*. П интегрируя почленно это уравнение, получаем:

$$\int P(x)\cdot dx + \int Q(y)\cdot dy = c$$

— его общий интеграл.

Пример 48.2. Найти общий интеграл уравнения $x\cdot dx + y\cdot dy = 0$

Решение: Данное уравнение есть ДУ с разделенными переменным Поэтому $\int x\cdot dx - \int y\cdot dy = c_1$ или $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1$. Обозначим $\frac{c}{2} = c_1$ Тогда $x^2 - y^2 = c$ — общий интеграл ДУ.

Более общий случай описывают уравнения с *разделяющимися переменными*, которые имеют вид

$$\boxed{P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0.} \qquad (48.6)$$

Особенность уравнения (48.6) в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций (чисел), одна из которых зависит только от x, другая — только от y.

Уравнение (48.6) легко сводится к уравнению (48.5) путем почленного деления его на $Q_1(y)\cdot P_2(x)\neq 0$. Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy = 0, \quad \int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cdot dx + \int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy = c$$

— общий интеграл.

Замечания. 1. При проведении почленного деления ДУ на $Q_1(y)\times\times P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения, — ***особые решения***.

Пример 48.3. Решить уравнение $(y+xy)\cdot dx + (x-xy)\cdot dy = 0$.

Решение: Преобразуем левую часть уравнения:

$$y\cdot(1+x)\cdot dx + x\cdot(1-y)\cdot dy = 0.$$

Оно имеет вид (48.6). Делим обе части уравнения на $xy\neq 0$:

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0.$$

Решением его является общий интеграл $x+\ln|x|+\ln|y|-y=c$, т. е. $\ln|xy|+x-y=c$.

Здесь уравнение $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ имеет вид $xy=0$. Его решения $x=0$, $y=0$ являются решениями данного ДУ, но не входят в общий интеграл. Значит, решения $x=0$, $y=0$ являются особыми.

48.3. Однородные дифференциальные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка.

Функция $f(x;y)$ называется *однородной функцией n-го порядка* (измерения), если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т. е.

$$f(\lambda\cdot x;\lambda\cdot y) = \lambda^n\cdot f(x;y).$$

Например, функция $f(x;y)=x^2-2xy$ есть однородная функция второго порядка, поскольку

$$f(\lambda\cdot x;\lambda\cdot y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2\cdot(x^2-2xy) = \lambda^2\cdot f(x;y).$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x;y) \qquad (48.7)$$

называется ***однородным***, если функция $f(x;y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Покажем, что однородное ДУ (48.7) можно записать в виде

$$\boxed{y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).} \qquad (48.8)$$

Если $f(x;y)$ — однородная функция нулевого порядка, то, по определению, $f(x;y)=f(\lambda x;\lambda y)$. Положив $\lambda=\frac{1}{x}$, получаем:

$$f(x;y) = f\Big(\frac{x}{x};\frac{y}{x}\Big) = f\Big(1;\frac{y}{x}\Big) = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Однородное уравнение (48.8) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$$\boxed{\frac{y}{x} = u} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \boxed{y = u\cdot x.} \qquad (48.9)$$

Действительно, подставив $y = ux$ и $y' = u'x + u$ в уравнение (48.8), получаем $u'x+u = \varphi(u)$ или $x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$, т. е. уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение (или общий интеграл), следует заменить в нем u на $\frac{y}{x}$. Получим общее решение (интеграл) исходного уравнения.

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$\boxed{P(x;y) \cdot dx + Q(x;y) \cdot dy = 0.} \tag{48.10}$$

ДУ (48.10) будет однородным, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — однородные функции одинакового порядка.

Переписав уравнение (48.10) в виде $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$ и применив в правой части рассмотренное выше преобразование, получим уравнение $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

При интегрировании уравнений вида (48.10) нет необходимости предварительно приводить их (но можно) к виду (48.8): подстановка (48.9) сразу преобразует уравнение (48.10) в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 48.6. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 - y^2) \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0.$$

Решение: Данное уравнение однородное, т. к. функции $P(x;y) = x^2 - y^2$ и $Q(x;y) = 2xy$ — однородные функции второго порядка.

Положим $y = u \cdot x$. Тогда $dy = x \cdot du + u \cdot dx$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x^2 - u^2x^2) \cdot dx + 2x \cdot ux \cdot x \cdot du + 2x \cdot ux \cdot u \cdot dx,$$

$$x^2(1 - u^2 + 2u^2) \cdot dx + 2ux^3 \cdot du = 0,$$

$$(1 + u^2) \cdot dx + 2ux \cdot du = 0,$$

последнее — уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2} \cdot du = 0$$

и интегрируем

$$\ln|x| + \ln(1+u^2) = c_1, \quad \ln\big(|x| \cdot (1+u^2)\big) = c_1, \quad |x|(1+u^2) = e^{c_1}.$$

Обозначим $c = e^{c_1}$, $c > 0$. Тогда

$$|x| \cdot (1 + u^2) = c.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем: $x^2 + y^2 = cx$ — общий интеграл исходного уравнения.

48.4. Линейные уравнения. Уравнение Я. Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка называется **линейным**, если его можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = g(x), \tag{48.1}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, в частности — постоянные.

Метод И. Бернулли

Решение уравнения (48.11) ищется в виде произведения двух других функций, т. е. с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x, причем одна из них произвольна (но не равна нулю — действительно любую функцию $y(x)$ можно записать как

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x),$$

где $v(x) \neq 0$). Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя выражения y и y' в уравнение (48.11), получаем: $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = g(x)$ или

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = g(x). \tag{48.12}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е. решим ДУ $v' + p(x) \cdot v = 0$. Итак, $\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0$, т. е. $\frac{dv}{v} = -p(x) \cdot dx$. Интегрируя, получаем:

$$\ln |v| = -\int p(x) \cdot dx + \ln |c|.$$

Ввиду свободы выбора функции $v(x)$, можно принять $c = 1$. Отсюда

$$v = e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (48.12), получаем

$$u' \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = g(x).$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = g(x), \quad du = g(x) \cdot e^{+\int p(x) \cdot dx} dx,$$

$$u = \int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + c.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем решение

$$y = u \cdot v = \left(\int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + c \right) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} \tag{48.13}$$

исходного ДУ (48.11).

Пример 48.8. Проинтегрировать уравнение $y' + 2xy = 2x$.

Решение: Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, т. е. $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$. Сначала решаем уравнение $v' + 2x \cdot v = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -2x \cdot dx, \quad \ln |v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Теперь решаем уравнение $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$, т. е.

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}, \quad du = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx, \quad u = e^{x^2} + c.$$

Итак, общее решение данного уравнения есть $y = u \cdot v = (e^{x^2} + c) \cdot e^{-x^2}$, т. е. $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$. ●

Уравнение Я. Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, \ n \in \mathbb{R}, \ n \neq 0, \ n \neq 1 \tag{48.15}$$

называется ***уравнением Бернулли.*** Покажем, что его можно привести к линейному.

В общем случае, разделив уравнение (48.15) на $y^n \neq 0$, получим:

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{-n+1} = g(x). \tag{48.16}$$

Обозначим $y^{-n+1} = z$. Тогда $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Отсюда находим $y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$. Уравнение (48.16) принимает вид

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p(x) \cdot z = g(x).$$

Последнее уравнение является линейным относительно z. Решение его известно. Таким образом, подстановка $z = y^{-n+1}$ сводит уравнение (48.15) к линейному. На практике ДУ (48.15) удобнее искать методом И. Бернулли в виде $y = u \cdot v$ (не сводя его к линейному).

48.5. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0 \qquad (48.17)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x;y)$, т. е.

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = du(x;y).$$

В этом случае ДУ (48.17) можно записать в виде $du(x;y) = 0$, а его общий интеграл будет:

$$u(x;y) = c. \qquad (48.18)$$

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение

$$\Delta = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$$

есть полный дифференциал.

Теорема 48.2. Для того чтобы выражение $\Delta = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$, где функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (48.19)$$

Достаточность.

Пусть в области D выполняется условие (48.19). Покажем, что существует функция $u(x;y)$ в области D такая, что

$$du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy.$$

Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x;y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x;y). \qquad (48.20)$$

Если в первом уравнении (48.20) зафиксировать y и проинтегрировать его по x, то получим:

$$u(x;y) = \int P(x;y)\,dx + \varphi(y). \qquad (48.21)$$

Здесь произвольная постоянная $c = \varphi(y)$ зависит от y (либо является числом). В решении (48.21) не известна лишь $\varphi(y)$. Для ее нахождения продифференцируем функцию (48.21) по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

Используя второе равенство (48.20), можно записать:

$$Q(x;y) = \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y + \varphi'(y).$$

Отсюда

$$\varphi'(y) = Q(x;y) - \left(\int P(x;y)\,dx\right)'_y. \qquad (48.22)$$

... Покажем, что и правая

Из равенства (48.22) находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int \left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x;y)\,dx \right) \right) dy + c, \quad c - \text{const}.$$

Подставляя найденное значение для $\varphi(y)$ в равенство (48.21), находим функцию $u(x;y)$ такую, что $du(x;y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$. ■

Таким образом, при решении ДУ вида (48.17) сначала проверяем выполнение условия (48.19). Затем, используя равенства (48.20), находим функцию $u(x;y)$. Решение записываем в виде (48.18).

Пример 48.11. Решить уравнение $y' = \dfrac{5-2xy}{3y^2+x^2}$.

○ Решение: Запишем уравнение в дифференциальной форме:

$$(2xy-5)\,dx + (3y^2+x^2)\,dy = 0.$$

Здесь $P(x;y) = 2xy - 5$, $Q(x;y) = 3y^2 + x^2$. Проверяем выполнение условия (48.19):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Условия (48.20) будут здесь выглядеть как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 5, \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + x^2.$$

Отсюда имеем

$$u(x;y) = \int (2xy-5)\,dx = x^2y - 5x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2y - 5x + \varphi(y))'_y = x^2 + \varphi'(y).$$

Далее

$$3y^2 + x^2 = x^2 + \varphi'(y), \quad \varphi'(y) = 3y^2,$$

$$\varphi(y) = y^3 + c_1, \quad u(x;y) = x^2y - 5x + y^3 + c_1.$$

Общим интегралом является $x^2y - 5x + y^3 + c_1 = c_2$, или $x^2y - 5x + y^3 = c$, где $c = c_2 - c_1$. ●